Prova Trimestral

Feito por: Alberto Torezan, Alice Bonilha, Luiz Sautchuk, Marcello Dallolio, Matteo Montibeller e Vinícius Masui.

Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais:

Grandezas diretamente proporcionais:

Definição: Duas grandezas (x e y) são diretamente proporcionais quando seus valores aumentam simultaneamente, de modo que a razão (x/y) permanece constante.

Exemplo: Um automóvel parte do quilômetro 0 de uma estrada e desloca-se com uma velocidade constante de 80 km/h

Com essas informações, é possível formar uma tabela:

Tempo (horas)	0	1	2	3	4	4,5	5	6
Espaço (Km)	0	80	160	240	320	360	400	480

Observe que os valores de tempo e espaço aumentam simultaneamente (quanto mais horas o automóvel percorre, mais km por hora são andados)

Também observe que a razão 1/80 permanece constante para todos os valores:

2/160 = 1/80

3/240 = 1/80

...

Taxa de variação:

Se x/y = a, logo, x = y.a

O número que multiplica y, representado pela incógnita "a", é chamado de taxa de variação.

Exemplo 2: Um automóvel parte do quilômetro 30 de uma estrada e desloca-se com velocidade constante de 80 km/h

Com essas informações, também é possível formar uma tabela:

Tempo (horas)	0	1	2	3	4	4,5	5	6
Espaço (km)	30	110	190	270	350	390	430	510

Observe que, mesmo com a alteração do marco da estrada, as grandezas ainda são diretamente proporcionais.

Neste caso, utiliza-se a seguinte fórmula para resolver a questão:

$\frac{s-30}{t} = 80$

s = Espaço

t = Tempo

30 = Taxa de variação

Fazendo a multiplicação dos dois valores, temos;

s = 80t + 30

Este valor será a constante

Em situações como essa, o valor que corresponder ao marco 0 (30, neste enunciado) sempre será a taxa de variação.

Resoluções:

1) Um garçom recebe um salário fixo mensal de 1000 reais, e mais 3 reais por cliente que ele atende. Pede-se:

a) Sendo "y" o ganho mensal total do garçom e "x" o número de clientes, escreva fórmula que expressa a interdependência entre x e y.

ganho mensal total = 3 reais por cliente + 1000   y = 3x + 1000

b) Qual a taxa de variação y em função de x?

3, pois é o aumento no salário por cliente atendido.

Grandezas Inversamente Proporcionais

Definição: Duas grandezas (x e y) são inversamente proporcionais quando o valor de um aumenta e o outro diminui simultaneamente.

O produto x.y se mantém constante.

Se x.y = k, logo, y = k.$\frac{1}{x}$

k é chamado de constante de proporcionalidade

Exemplo: Viajando com velocidade de 50 km/h um ônibus vai da cidade A até a cidade B em 12 horas

a) Qual a distância entre as cidades a e b?

Essa questão pode ser resolvida ao multiplicarmos a velocidade que o ônibus anda e a quantidade de horas que ele demora para chegar na cidade B:

50.12 = 600km

b) Preencha a seguinte tabela:

Velocidade (km)	40	50	60	80	100	12 0
Tempo (horas)		12				

Primeiramente, perceba que essas grandezas são inversamente proporcionais, pois quanto mais rápido o ônibus anda, menos horas demora o caminho.

Com isso, é possível aplicar a relação:

x.y = Constante de proporcionalidade

Então, se multiplicarmos 50 por 12, o resultado irá se manter constante para todos os outros valores da tabela:

Se 50.12 é igual a 600, logo:

40.t = 600

60.t = 600

80.t = 600

100.t = 600

120.t = 600

Os resultados de t são, respectivamente: 15 / 10 / 7,5 / 6 / 5

1) Sabe-se que 10 operários conseguem construir uma laje em 4 dias. Porém, 2 deles entraram em férias. Quanto tempo será gasto para que os operários restantes construam uma laje com as mesmas dimensões da primeira?

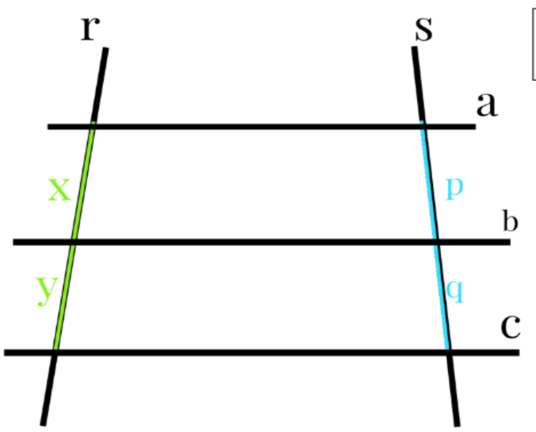
operários	10	8
dias	4	x

Sabendo que os números são inversamente proporcionais, basta multiplicar os de cima com os de baixo:

10.4 = 8.x   40 = 8x   5 = x

Resposta: 5 dias.

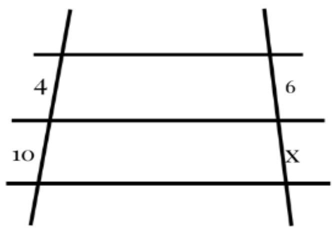
Teorema de Tales:



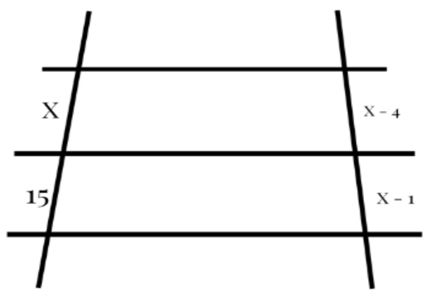
a//b//c são paralelas
r e s são transversais

$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ ----- ↑

Exemplos:



4/10 = 6/X (multiplicamos em cruz)
4x = 60
X = 15

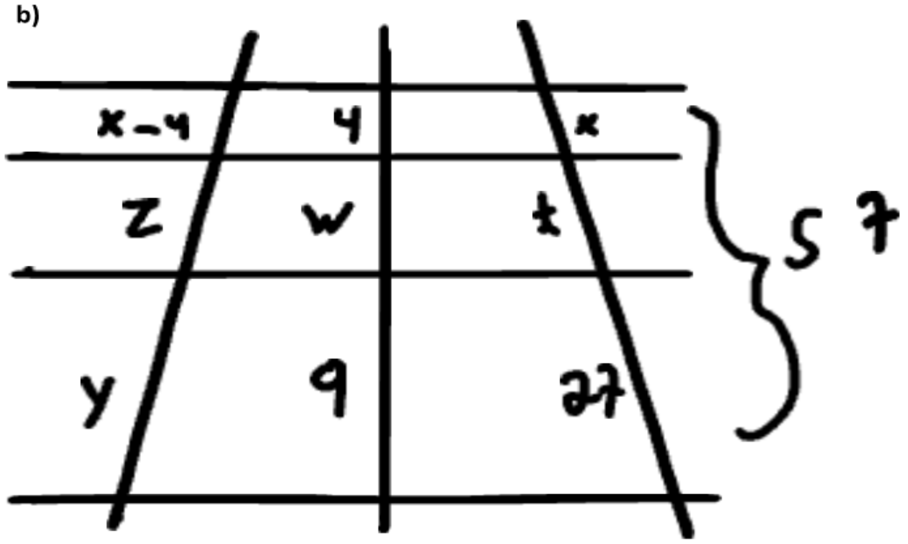


x/15 = x-4/x-1
$x^2 - 16x + 60x$
$(x - 10)\ (x - 6)$
X = 10 ou x = 6
Resposta: substituindo nas equações descobrimos que **x=10**

Aplicação deste teorema em um exercício da apostila: (volume 1 - exercício 140 b)

140- As figuras abaixo mostram feixes de pararelas. Determine o valor das incógnitas.

b)



Note que: $x + t + 27 = 57$ --------- ↑

Resolvendo o exercício:

1º) achar uma fração c/ 1 incógnita e o resto, números:

$$\frac{4}{\cancel{9}_1} = \frac{x}{\cancel{27}_3} \rightsquigarrow 12 = x$$

2º) substituir o x por 12 e achar mais frações possíveis:

$$12 + t + 27 = 57 \rightsquigarrow t = 18$$

3º) continuar substituindo e resolvendo:

$$\frac{4}{w} = \frac{\cancel{12}^{2}}{\cancel{18}_{3}} \rightsquigarrow 2w = 12 \rightsquigarrow w = 6$$

4°) $x - 4 = 8 \longrightarrow \frac{\cancel{8}^{2}}{z} = \frac{\cancel{4}^{1}}{6} \rightsquigarrow z = 12$

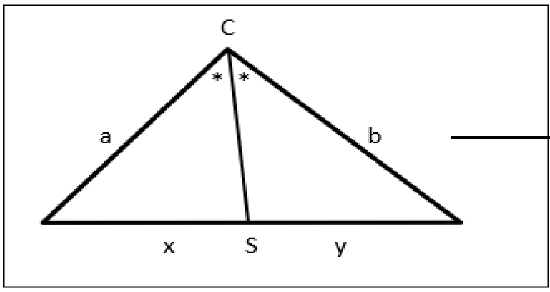
5°) $\frac{\cancel{12}^{2}}{y} = \frac{\cancel{6}^{1}}{9} \rightsquigarrow y = 18$

Ao final, obteremos: x = 12 / t = 18 / w = 6 / z = 12 / y = 18

Teoremas das Bissetrizes Interna e Externa de um Triângulo:

- A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos <u>proporcionais</u> aos lados adjacentes.

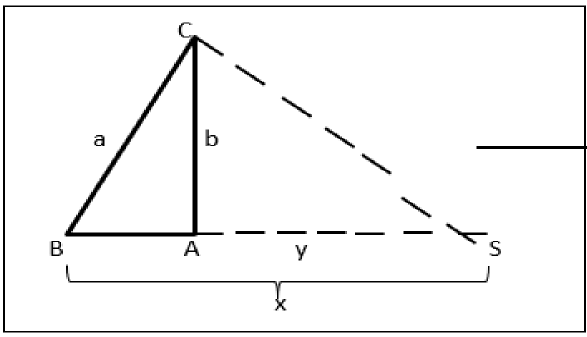
Ou seja:



$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

- se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então os segmentos determinados nesta reta são proporcionais aos lados adjacentes ao ângulo.

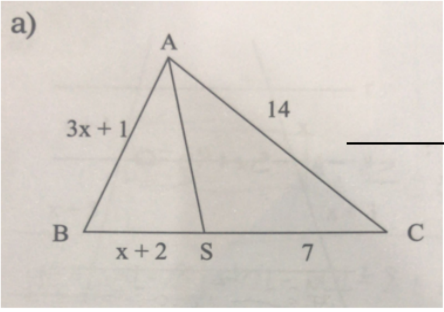
Ou seja:



$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Na prática:

(bissetriz interna)



Aqui, usaremos aquela regra de que: quando o ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos <u>proporcionais</u> aos lados adjacentes

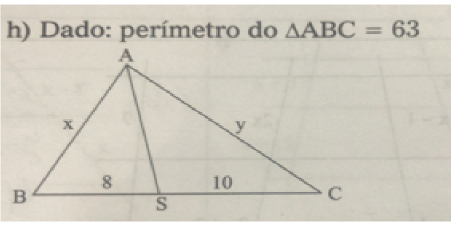
$$\frac{3x+1}{x+2} = \frac{14}{7}$$

$$\downarrow$$

$$3x + 1 = 2x + 4$$

$$\downarrow$$

$$x = 3$$



Aqui, usaremos a mesma regra do exercício anterior, porém, nesse exercício temos duas incógnitas. Para resolve-lo devemos saber o valor de x+y. Para isso, vamos pegar o perímetro dado (63) e subtrai-lo pelos números 8 e 10. Desta subtração obteremos 45 (valor de x+y). Agora que já temos o valor de x+y podemos usar uma propriedade que consiste em somar o valor de cima e o valor de baixo.

Assim está nosso exercício por enquanto:

$$\frac{x+y}{8+10}$$

Agora, substituiremos o valor de x+y por 45 e somamos 8+10

45/18 → 5/2

Com esse valor de 5/2 podemos descobrir quanto valem as incógnitas. Então faremos a seguinte conta:

$\frac{5}{2} = \frac{x}{8}$ ⟶ x = 20

Agora que descobrimos x, podemos terminar com a regra da bissetriz interna ou fazer 5/2 = y/10:

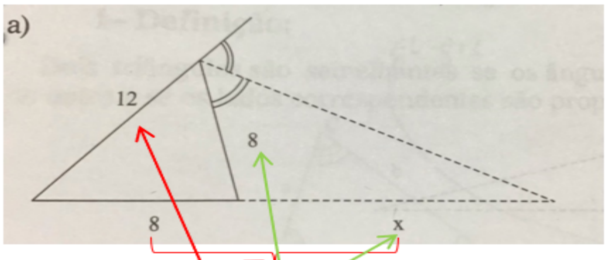
$\frac{5}{2} = \frac{y}{10}$ ⟶ y = 25 OU... ⟶

$$\frac{20}{8} = \frac{y}{10}$$

$$200 = 8y$$

$$y = 25$$

(bissetriz externa)



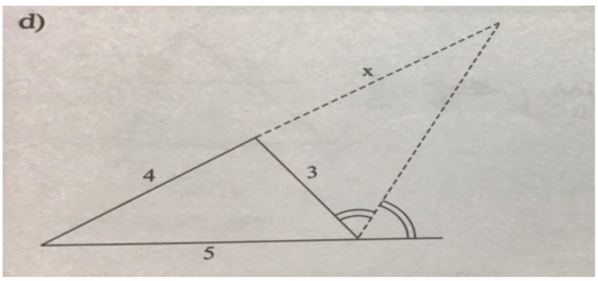
Para montarmos à proporção que resolverá o exercício, teremos que usar a regra que diz que se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então os segmentos determinados nesta reta são proporcionais aos lados adjacentes ao ângulo. Pensado nisso, vamos montar a proporção:

$$\frac{12}{8+x} = \frac{8}{x}$$

$$\downarrow$$

$$12x = 64 + 8x$$

$$x = 16$$



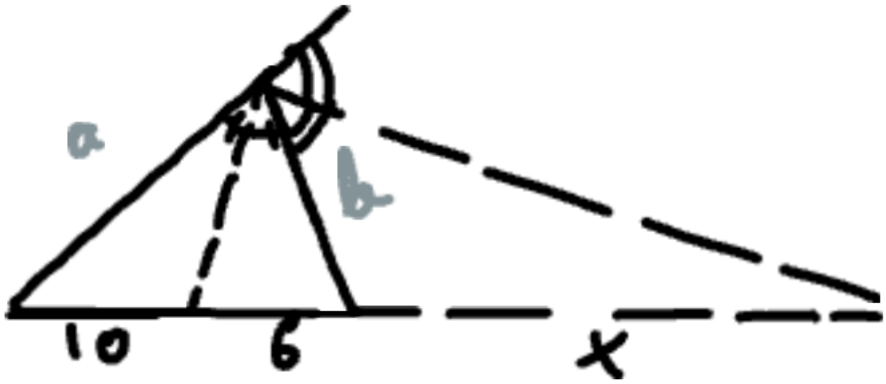
Esse exercício, é bem parecido com o anterior, o que os diferencia é a sua posição, assim fazendo com que muita gente se confunda.

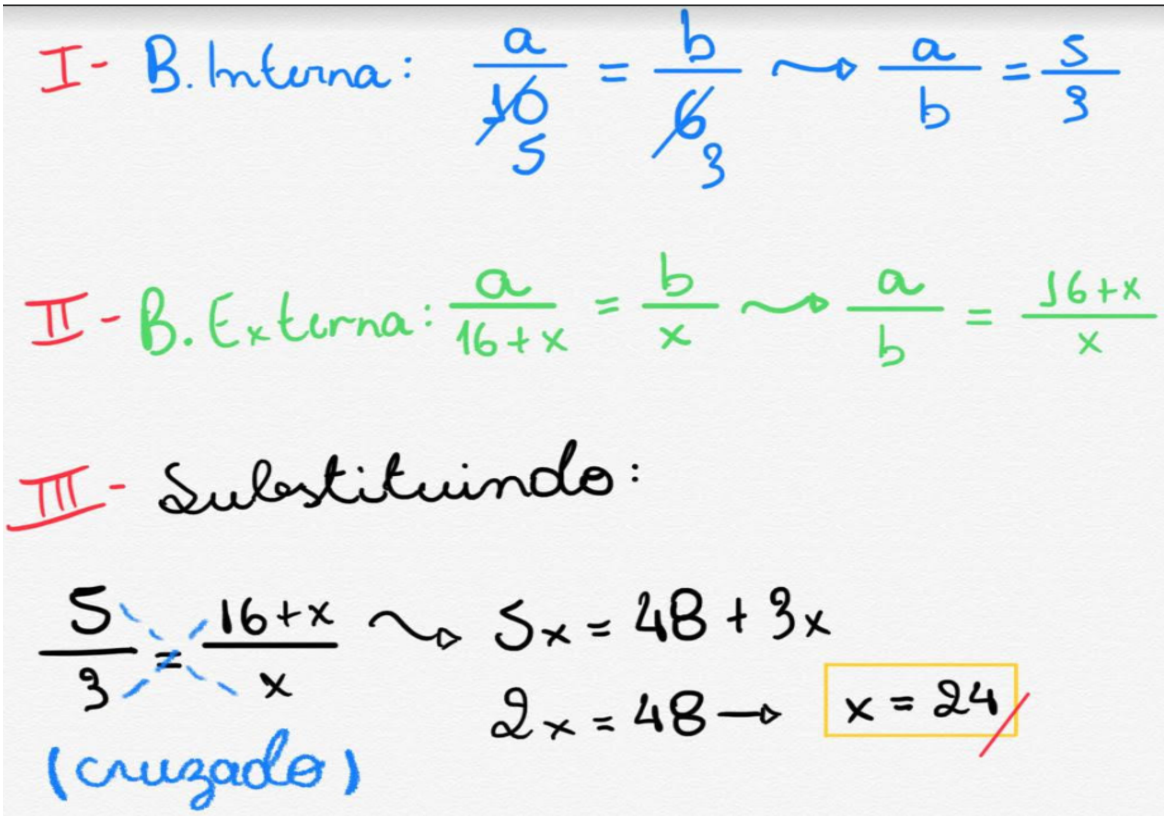
Usaremos o mesmo principio. Pegaremos o 5 e o 4 + x (pois são proporcionais aos lados adjacentes ao ângulo) e faremos igual ao 3 e o x

$$\frac{5}{4+x} = \frac{3}{x} \longrightarrow 5x = 12 + 3x \longrightarrow x = 6$$

Aplicação destes conceitos em um exercício da apostila: (volume 1 - exercício 142 f)

142-Calcule x nos casos abaixo, onde marcas iguais indicam ângulos de mesma medida.
f)





I- B. Interna: $\frac{a}{\cancel{16}_{5}} = \frac{b}{\cancel{6}_{3}} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$

II- B. Externa: $\frac{a}{16+x} = \frac{b}{x} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{16+x}{x}$

III- Substituindo:

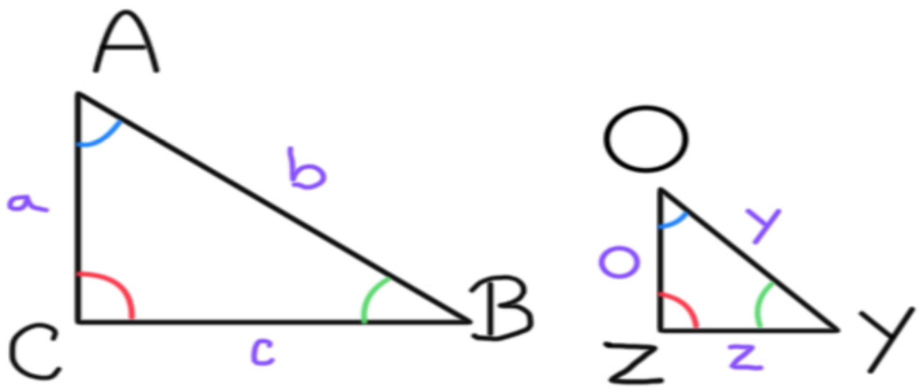
$\frac{5}{3} = \frac{16+x}{x} \rightarrow 5x = 48 + 3x$

$2x = 48 \rightarrow \boxed{x = 24}$

(cruzado)

Semelhança de Triângulos:

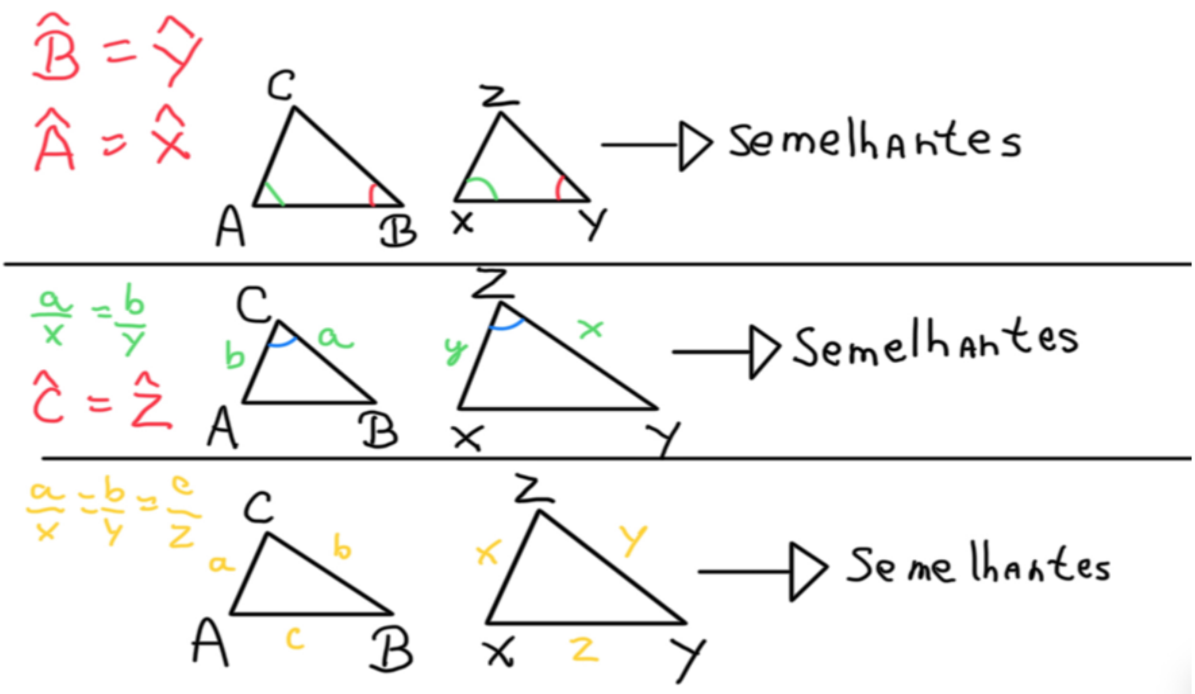
A semelhança entre dois triângulos ocorre se os ângulos de um têm medidas iguais aos ângulos do outro e se seus segmentos de retas forem proporcionais entre si:



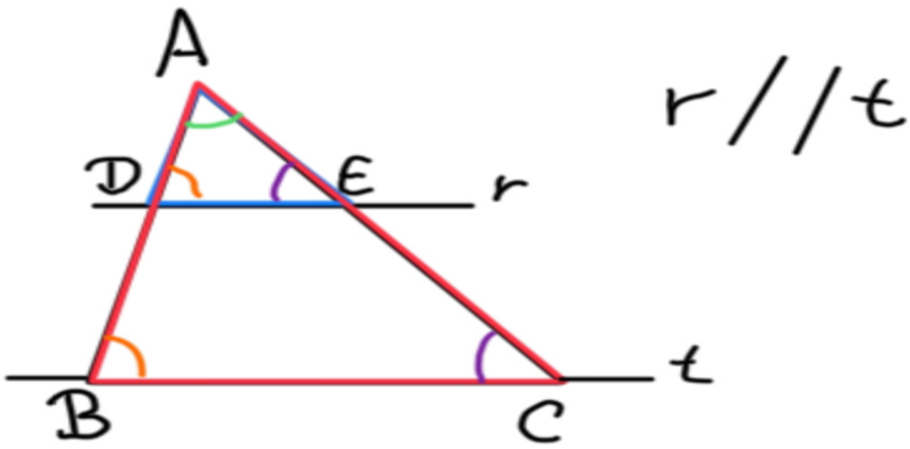
Triângulo ABC é semelhante ao OYZ. Ângulos possuem a mesma medida entre si (Ô = Â, por exemplo). Dá-se:

$$\frac{a}{o} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Se há somente dois ângulos semelhante entre dois triângulos, já conseguimos afirmar que este é semelhante a aquele. O mesmo ocorre com os lados do polígono, se houver dois segmentos de reta de um triângulo proporcional a outros dois lados de um outro triângulo e os ângulos formados por esses lados são congruentes, serão caracterizados como semelhantes. Se os três lados de um triângulo são proporcionais aos outros três lados de um outro triângulo, eles também serão semelhantes:

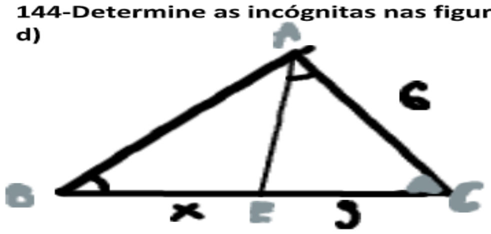


Qualquer reta paralela a um lado de um triângulo, que intercepta os outros dois (desde que não seja em um vértice) determina um triângulo semelhante ao original:



Aplicação destes conceitos em um exercício da apostila: (volume 1 - exercício 144 d)

144-Determine as incógnitas nas figuras abaixo
d)



ΔABC
ΔEAC

$$\frac{6}{x+3} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}} \rightarrow 12 = x+3 \rightarrow x = 9$$

Radiciação:

- **Radiciação: Propriedades**

➔ **1° Propriedade)**

$\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $sendo\ b \neq 0$

→ Multiplicação e divisão de radicandos. Como o índice das raízes é o mesmo (3), é possível realizar as operações.

Exemplos:
1- $\sqrt[3]{3x} \,.\, \sqrt[3]{2y} \,.\, \sqrt[3]{6xy} = \sqrt[3]{36x2y2}$ → Multiplica-se os radicandos, porque seus índices são os mesmos
2- $\frac{\sqrt[3]{24x^2}}{\sqrt[3]{4x}} = \sqrt[3]{\frac{24x^2}{4x}} = \sqrt[3]{6x}$ → Divide os radicandos, porque seus índices são os mesmos

➔ **2° Propriedade)**

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div p]{a^{m \div p}}$

→ Quando multiplicamos ou dividimos o índice e o expoente do radicando pelo mesmo número, a raiz não se altera.

Exemplos:
1- $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3.4]{2^{2.4}} \rightarrow$
2- $\sqrt[20]{4^5} = \sqrt[20 \div 5]{4^{5 \div 5}}$

➔ **3° Propriedade)**

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

→ Quando uma raiz está elevada a algum expoente, esse número passa elevando o radicando

Exemplos:

1- $(\sqrt[5]{\mathbf{2}})^{\mathbf{5}} = \sqrt[5]{\mathbf{2^5}} = \mathbf{2}$

➔ **4° Propriedade)**

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

→ Para resolver a raiz de uma raiz, é necessário manter o radicando e multiplicar os índices

Exemplos:

1- $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2.3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

- **Radiciação: Simplificação de expressões**

→ Quando as raízes possuem o mesmo índice e radicando, é possível fazer as operações necessárias, porém quando estes números são diferentes, se possível, deve-se simplificar as raízes, como mostram os exemplos abaixo.

Exemplos:

1- $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

2- $3\sqrt{18} + 2\sqrt{32} = 3\sqrt{2\,.\,3^2} + 2\sqrt{2^5} = 3.3\sqrt{2} + 2.2^{2\sqrt{2}} = 9\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

3- $\sqrt[4]{4} - 2\sqrt[6]{27} + 3\sqrt[8]{16} = \sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

4- $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{4.2\sqrt{3}-6.3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12} = \frac{8\sqrt{3}-18\sqrt{2}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12} == \frac{6\sqrt{3}-21\sqrt{2}}{12} = \frac{6\sqrt{3}}{12} - \frac{21\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\sqrt{2}}{4}$

EXERCÍCIOS

1) Simplificar: $2\sqrt{8} - 3\sqrt{27} - 2\sqrt{32} + 2\sqrt{243} - \sqrt{128} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{12}$.

2) Simplifique as expressões:

a) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{5}{6}\sqrt[3]{3} - \frac{7}{15}\sqrt{3} =$

b) $\frac{2}{9}\sqrt{18} - \frac{3}{8}\sqrt{12} + \frac{1}{3}\sqrt{8} - \frac{1}{4}\sqrt{27} =$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

1) $2\sqrt{8} - 3\sqrt{27} - 2\sqrt{32} + 2\sqrt{243} - \sqrt{128} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{12} =$

$2\sqrt{2^3} - 3\sqrt{3^3} - 2\sqrt{2^5} + 2\sqrt{3^5} - \sqrt{2^7} - 2\sqrt{2.3^2} - 3\sqrt{2^2.3} =$

$2.2\sqrt{2} - 3.3\sqrt{3} - 2^3\sqrt{2} + 2.3^2\sqrt{3^5} - 2^3\sqrt{2} - 2.3\sqrt{2} - 3.2\sqrt{3} =$

$4\sqrt{2} - 9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 18\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3} =$

$4\sqrt{2} - 9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 18\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3} =$

$18\sqrt{2} + 3\sqrt{3} =$

2)a) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{5}{6}\sqrt[3]{3} - \frac{7}{15}\sqrt{3} =$

$\frac{6.2\sqrt[3]{3} - 10\sqrt{3} + 5.5\sqrt[3]{3} - 7.2\sqrt{3}}{30} =$

$\frac{12\sqrt[3]{3} - 10\sqrt{3} + 25\sqrt[3]{3} - 14\sqrt{3}}{30} =$

$\frac{27\sqrt[3]{3} - 24\sqrt{3}}{30} =$

$\frac{\cancel{3}.9\sqrt[3]{3} - \cancel{3}.8\sqrt{3}}{\cancel{3}.10} =$

$\frac{9\sqrt[3]{3}}{10} - \frac{\cancel{2}.4\sqrt{3}}{\cancel{2}.5} =$

$\frac{9\sqrt[3]{3}}{10} - \frac{4\sqrt{3}}{5}$

b) $\frac{2}{9}\sqrt{18} - \frac{3}{8}\sqrt{12} + \frac{1}{3}\sqrt{8} - \frac{1}{4}\sqrt{27} =$

$\frac{2}{9}\sqrt{2.3^3} - \frac{3}{8}\sqrt{2^2.3} + \frac{1}{3}\sqrt{2^3} - \frac{1}{4}\sqrt{3^3} =$

$\frac{2.\cancel{3}}{\cancel{9}3}\sqrt{2} - \frac{3.\cancel{2}}{\cancel{8}4}\sqrt{3} + \frac{1.2}{3}\sqrt{2} - \frac{1.3}{4}\sqrt{3} =$

$\frac{4.2\sqrt{2} - 3.3\sqrt{3} + 4.2\sqrt{2} - 3.3\sqrt{3}}{12} =$

$\frac{8\sqrt{2} - 9\sqrt{3} + 8\sqrt{2} - 9\sqrt{3}}{12} =$

$\frac{16\sqrt{2} - 18\sqrt{3}}{12} =$

$\frac{\cancel{2^2}.4\sqrt{2}}{\cancel{2^2}.3} - \frac{\cancel{6}.3\sqrt{3}}{\cancel{6}.2} =$

Dicas:

- Em um exercício de grandezas diretamente proporcionais, na hora de multiplicar entre frações, multiplique cruzado. Exemplo:

vagas	10	5
carros	6	x

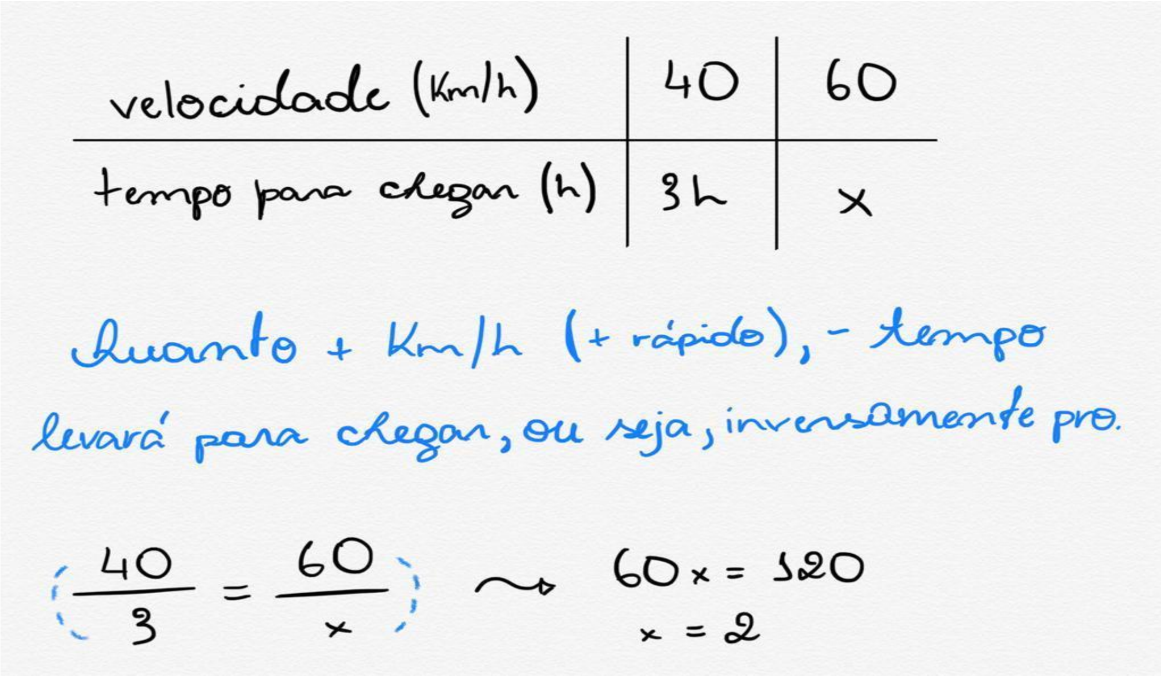
Quanto − vagas, − carros, ou seja, diretamente proporcionais.

$\frac{10}{6} = \frac{5}{x}$ ⇝ $10x = 30$

$x = 3$

(cruzado)

- Em um exercício de grandezas inversamente proporcionais, na hora de multiplicar entre frações, multiplique o de cima pelo de baixo. Exemplo:



velocidade (Km/h)	40	60
tempo para chegar (h)	3h	x

Quanto + Km/h (+ rápido), - tempo levará para chegar, ou seja, inversamente pro.

$$\frac{40}{3} = \frac{60}{x} \rightsquigarrow 60x = 120$$
$$x = 2$$

- Em exercícios de radiciação, quando tiver que substituir um número grande dentro da raiz, decomponha-o com números primos. Exemplos:

$\sqrt[2]{243}$ 243 ÷ 3 = 81 ÷ 3 = 27 ÷ 3 = 9 ÷ 3 = 3 ÷ 3 = 1

foi possível dividir o número por 3 um total de 5 vezes. Ou seja, 243 = 3^5

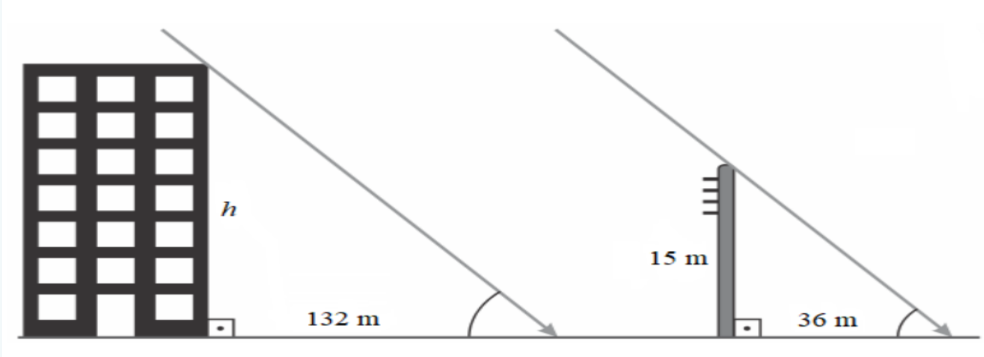
$\sqrt[2]{120}$ 120 ÷ 2 = 60 ÷ 2 = 30 ÷ 2 = 15 ÷ 3 = 5 ÷ 5 = 1

foi possível dividir o número 120 por 2 três vezes, por 3 uma vez e por 5 uma vez. Ou seja, 120 = 2^3.3.5

*Lembrando que, nessa regra de decomposição, devemos fazer sempre pelos números primos (2, 3, 5, 7, 11, etc.) e sempre que possível o menor deles. Exemplo:

15 é possível dividi-lo por 5, entretanto, também é por 3, que vem primeiro. Logo... 15 ÷ 3 = 5 [...]*

- Exercícios com o teorema de tales podem aparecer de jeitos diferentes, como o exemplo abaixo:



É só fazer a mesma coisa, afinal, ainda existem as mesmas linhas paralelas, porém, de outro ângulo. Resolvendo o exercício:

$\frac{h}{132} = \frac{15}{36}$ h.36 = 132.15 36h = 1980 h = 55

OBSERVAÇÃO!!!

Não nos responsabilizamos pela falta de conteúdos no material.
Este resumo deve ser utilizado como uma **ferramenta extra de estudo**. Não se limite a ele. Não deixe de ver os outros materiais! Deve ser usado como um **material de revisão**.

*Este material não foi revisado por nenhum professor e está *sujeito a erros**

Confira a orientação de estudos no Moodle para ver todos os materiais indicados para estudo.

Boa Prova!